

10 Vektoren, Matrizen und lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Vektoren und Matrizen sowie mit der Lösung von linearen Gleichungssystemen. Entwickelt wurde die Vektor- und Matrizenrechnung durch



Wissenschaftler 12:
Hermann Günther GRASSMANN, deutscher Mathematiker
(15.04.1809 Stettin - 26.09.1877 Stettin)

"Vektorrechnung" (1844)



Wissenschaftler 13:
James Joseph SYLVESTER, britischer Mathematiker
(03.09.1814 London - 15.03.1897 London)

„Matrizen“ (1850)

10.1 Vektor

Definition 10.1. (i) Ein *Vektor des $\mathbb{R}^n$* ist eine Zusammenfassung von n reellen Zahlen, durch Klammerung angedeutet und gegebenenfalls durch Kommata getrennt.

(ii) Die n Zahlen heißen die Komponenten des Vektors. ²¹

²¹Der Begriff *Vektor* wurde nahezu zeitgleich 1844 durch Hermann Günter GRASSMANN (1809-1877) und William Rowan HAMILTON (1805-1865) eingeführt.

Konvention

. Sofern nichts anderes gesagt wird, schreiben wir Vektoren stets als Spaltenvektor:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

10.2 Addition von Vektoren

Definition 10.2. Seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Addition der Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

10.3 Rechenregeln für die Addition von Vektoren

Satz 10.3. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(i) Die Summe zweier Vektoren ist wieder ein Vektor. (Abgeschlossenheit)

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Assoziativität)

(iii) Es gibt einen Vektor $\vec{0}$, so daß $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (Existenz des neutralen Elementes)

(iv) Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein Vektor $\vec{z}$, so daß $\vec{a} + \vec{z} = \vec{0}$ (Existenz des inversen Elementes)

(v) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativität)

10.4 Skalare Multiplikation

Definition 10.4.

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.²²

Dann definieren wir die skalare Multiplikation:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

10.4.1 Multiplikation ungleich Produkt

Skalare Multiplikation

. Diese Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar nennt man skalare Multiplikation.

Multiplikation $\neq$ Produkt

ACHTUNG: Das Wort „*Produkt*“ sollte in diesem Zusammenhang nicht verwendet

werden, da sonst Konflikte mit dem Begriff „*Skalarprodukt*“ (siehe 10.9) vorprogrammiert sind.

²²Der Begriff *Skalar* für eine reelle Zahl wurde 1844 durch William Rowan HAMILTON (1805-1865) eingeführt.

10.5 Rechenregeln für die skalare Multiplikation

Satz 10.5. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Skalare. Dann gilt:

(i) Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ist wieder ein Vektor. (Abgeschlossenheit)

(ii) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (Multiplikativität)

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$ (Assoziativität)

(iv) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ (Distributivität bzgl. Skalar)

(v) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ (Distributivität bzgl. Vektor)

10.6 Übung

Beispiel 10.6. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(i) $\vec{a} + \vec{b}$

(ii) $\vec{a} + \vec{c}$

(iii) $\vec{c} + \vec{d}$

(iv) $2 \cdot \vec{a}$

(v) $-\pi \cdot \vec{b}$

(vi) $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$

Lösung (i)

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung (ii)

$$\vec{d} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} ?$$

FEHLER !

Die Komponentenzahl beider Vektoren muß übereinstimmen !

$\vec{d} + \vec{c}$ ist **nicht definiert** !

Lösung (iii)

$$\vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung (iv)

$$2 \cdot \vec{d} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung (v)

$$-\pi \cdot \vec{b} = -\pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ -\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung (vi)

$$\frac{1}{2} \cdot \vec{d} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} \quad (i) \quad \frac{1}{2} \cdot (\vec{d} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

10.7 Transponierter Vektor

Definition 10.7. Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ ein Vektor.}$$

Dann heißt

$$\vec{a}^T = (a_1, \dots, a_n) \text{ der zu } \vec{a} \text{ transponierte Vektor.}$$

10.8 Doppelte Transposition

Satz 10.8. Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann gilt:

$$(\vec{a}^T)^T = \vec{a}$$

10.9 Skalarprodukt

Definition 10.9. Seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$.

Dann heißt

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n$$

das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.²³

Zeile zuerst, Spalte später

Im Skalarprodukt

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b}$$

muß der *erste* Vektor immer ein *Zeilenvektor* und der *zweite* Vektor ein *Spaltenvektor* sein. Merkregel: Zeile zuerst, Spalte später.

²³Der Begriff *Skalarprodukt* wurde 1878 durch William Kingdon CLIFFORD (1845-1879) eingeführt.

. Warum, das kann an dieser Stelle nicht näher begründet werden. Es sei hier nur angemerkt, daß die Mathematik eine hierarchisch organisierte Wissenschaft ist und sich die Theorie der Vektoren der höheren Theorie der Matrizen unterordnen muß. Dies ist aber nur möglich (wie wir noch sehen werden), wenn das Skalarprodukt wie oben definiert wird.

10.10 Länge eines Vektors

Definition 10.10. Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ein Vektor des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

die (euklidische) Länge des Vektors.

- . Andere Bezeichnungen: Norm des Vektors, ²⁴ Betrag des Vektors
- . Bemerkung: Bei Vektoren hat sich für den Betrag der „Doppelstrich“ eingebürgert.

Hierfür gibt es gute mathematische Gründe (sog. „Norm-eigenschaften“), die wir hier nicht besprechen können. Insbesondere für die Klausur wird - sollte es vorkommen - aber auch der „einfache Betragsstrich“ akzeptiert.

10.11 Satz über das Skalarprodukt

Satz 10.11. Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

- . Die obige Formel kann man nun äquivalent umformen zu

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Einverstanden ?

²⁴Der Begriff *Norm* geht auf Erhard SCHMIDT (1876-1959) zurück, der ihn 1908 erstmalig verwendet hat.

Die obige Formel kann man nun **äquivalent** umformen zu

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Einverstanden ? **NEIN !**

FEHLER !

10.12 Winkel zwischen Vektoren

Satz 10.12. Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad \text{falls } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } \vec{b} \neq \vec{0}$$

Bitte denken Sie daran, dass Sie *nicht durch Null dividieren* dürfen !

10.12.1 Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie den Winkel zwischen

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4711 \\ \pi \\ e^2 \\ 812 \end{pmatrix}$

$$(v) \begin{pmatrix} \pi \\ 2e \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4\pi - 2e \end{pmatrix}$$

$$(vi) (0), (9^9)$$

Lösung (i)

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Lösung (ii)

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Lösung (iii)

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{32}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} \Rightarrow \alpha = 12,933^\circ$$

Lösung (iv)

Das Skalarprodukt (im Zähler) ist aufgrund der unterschiedlichen
Komponentenanzahlen nicht definiert.

Lösung (v)

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} \pi & 2e & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4\pi - 2e \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} \pi \\ 2e \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4\pi - 2e \end{pmatrix} \right\|} = \frac{0}{\dots} \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Lösung (vi)

$$\cos(\alpha) = \frac{(0) \cdot (9^9)}{\|(0)\| \cdot \|(9^9)\|} = \frac{0}{0 \cdot 9^9}$$



10.13 Orthogonalität

Definition 10.13. Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann definiert man, auch wenn der Nullvektor beteiligt ist (obwohl man dann die Formel nicht verwenden kann) :

Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null, so sind die beiden Vektoren orthogonal²⁵ zueinander, also

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

. Damit ist auch der Fall (vi) von oben mit 90° zu beantworten.

²⁵orthogonal bedeutet „rechtwinklig“ oder „senkrecht“. Es stammt aus dem Griechischen „orthos“ = „recht-“ und „gonia“ = „Winkel“.

10.13.1 Vorgehensweise bei der Winkelberechnung

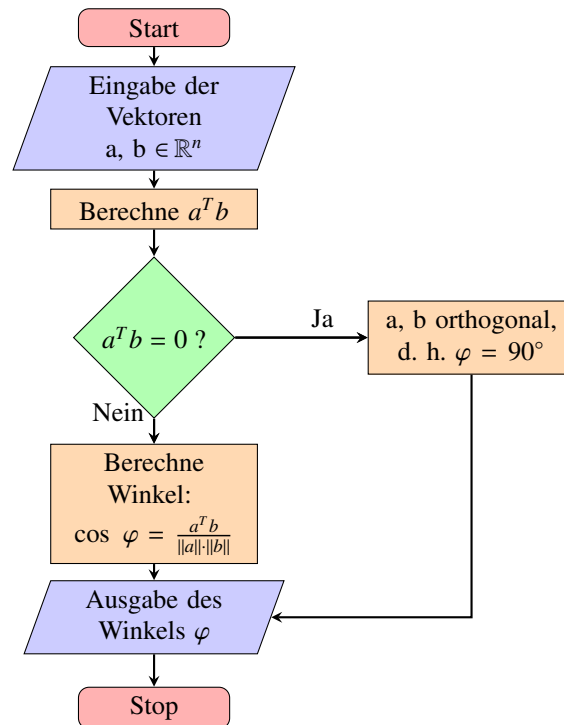


Abbildung 45: Ablauf einer Winkelberechnung zwischen Vektoren

10.13.2 Andere Fragestellung

Wenden wir uns nun einer ganz anderen Fragestellung zu:

10.13.3 Lage von Geraden in einer Ebene und im Raum

Welche Lage können zwei Geraden zueinander haben?

. Geraden in der Ebene

- | | |
|--------------|--------------------------------------|
| • parallel | Keine gemeinsamen Punkte |
| • schneidend | <u>Genau einen</u> gemeinsamen Punkt |
| • kongruent | Unendlich viele gemeinsame Punkte |

. Geraden im dreidimensionalen Raum

- | | |
|--------------|--------------------------------------|
| • parallel | Keine gemeinsamen Punkte |
| • windschief | Keine gemeinsamen Punkte |
| • schneidend | <u>Genau einen</u> gemeinsamen Punkt |
| • kongruent | Unendlich viele gemeinsame Punkte |

10.13.4 Folgerungen für lineare Gleichungssysteme

Der Grund dieser Frage ist, dass sich für die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen genau dieselben Ergebnisse ergeben:

Keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Merke:

Es gibt NIEMALS die Situation, dass sich zwei Geraden in der Ebene in GENAU ZWEI PUNKTEN schneiden. In dieser Situation muss es dann bereits unendlich viele „Schnittpunkte“ geben.

Dies ist in anderen geometrischen Situationen völlig unterschiedlich:

Zwei Geraden auf der Kugel können sich sehr wohl in genau zwei Punkten schneiden: Grosskreise haben diese Eigenschaft.

Daher ist es notwendig, lineare Gleichungssysteme genauer zu betrachten. Sie werden gleich feststellen, dass gilt:

Kleine Ursache - grosse Wirkung!

10.13.5 Regeln für lineare Gleichungssysteme

Wir überlegen uns zunächst, welche Regeln für das Lösen von Gleichungssystemen zulässig sind:

10.14 Erlaubte Transformationen

Satz 10.14. *Die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen wird nicht verändert durch folgende erlaubten Transformationen:*

- (i) Vertauschen zweier Zeilen.
- (ii) Multiplikation einer (beliebigen) Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.
- (iii) Addition bzw. Subtraktion (des Vielfachen) einer Zeile zu bzw. von einer (beliebigen) anderen Zeile.

Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855)

10.14.1 Regeln für lineare Gleichungssysteme

Diese Regeln wenden wir nun auf die folgenden drei Gleichungssysteme an.

Dazu überlegen wir uns folgende Strategie:

Wir eliminieren in der zweiten und in der dritten Zeile die Variable x durch geeignete Anwendung der Regel 3) und anschließend in der dritten Zeile noch die Variable y .

Dann erhalten wir die Lösung - sofern vorhanden - durch Auflösen von unten nach oben.

10.15 Drei Gleichungssysteme

Drei Gleichungssysteme

$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ 4x + 5y + 6z & = & 2 \\ 7x + 8y + 10z & = & 3 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ 4x + 5y + 6z & = & 2 \\ 7x + 8y + 9z & = & 3 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ 4x + 5y + 6z & = & 2 \\ 7x + 8y + 9z & = & 4 \end{array}$
$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ 7x + 8y + 10z & = & 3 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ 7x + 8y + 9z & = & 3 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ 7x + 8y + 9z & = & 4 \end{array}$
$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ -6y - 11z & = & -4 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ -6y - 12z & = & -4 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ -6y - 12z & = & -3 \end{array}$
$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ 1z & = & 0 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ 0z & = & 0 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 1x + 2y + 3z & = & 1 \\ -3y - 6z & = & -2 \\ 0z & = & 1 \end{array}$
genau eine Lösung: $(x, y, z)^T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)^T$	unendlich viele Lösungen	keine Lösung

10.15.1 Analyse der Resultate

Woran erkennt man die unterschiedlichen Lösungsmengen in den vorgenannten Gleichungssystemen?

Nachdem man die Gleichungssysteme auf diese Staffelform gebracht hat, ist alles jeweils in der letzten Zeile ablesbar.

Im linken Fall lautet diese $1z = 0$, woraus alles andere durch Rückwärtsauflösen folgt.

Im mittleren Beispiel lautet die letzte Zeile $0z = 0$, womit wir weniger „sinnvolle“ Zeilen als Variable haben. Somit darf eine Variable (z. B. z) beliebig gewählt werden,

Damit sieht man sofort, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

Rechts lautet die letzte Zeile $0 = 1$, was offensichtlich für keinen Vektor $(x, y, z)^T$ möglich ist.

10.15.2 Umformung eines Gleichungssystems 1

Wir erkennen, dass wir viel „Ballast“ bei der Lösung dieser Gleichungssysteme bewegt haben, denn die Variablen x, y, z stehen immer an der gleichen Stelle - wir rechnen nur in den Koeffizienten Variablen und der rechten Seite.

Daher formen wir nun das linke Gleichungssystem um.

Die erste Zeile von

$$1x + 2y + 3z = 1$$

$$4x + 5y + 6z = 2$$

$$7x + 8y + 10z = 3$$

lässt sich als Skalarprodukt schreiben:

$$1x + 2y + 3z = 1 \Leftrightarrow (1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

10.15.3 Umformung eines Gleichungssystems 2

Dies gilt analog für die anderen Zeilen des Gleichungssystems und wir erhalten:

$$1x + 2y + 3z = 1 \Leftrightarrow (1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

$$4x + 5y + 6z = 2 \Leftrightarrow (4, 5, 6) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2$$

$$7x + 8y + 10z = 3 \Leftrightarrow (7, 8, 10) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$$

Nun klammern wir den gemeinsamen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus und erhalten:

10.15.4 Umformung eines Gleichungssystems 3

$$\begin{array}{l} 1x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 10z = 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1, 2, & 3 \\ 4, 5, & 6 \\ 7, 8, 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie bitte, dass der „Supervektor“ $\begin{pmatrix} (1, 2, & 3) \\ (4, 5, & 6) \\ (7, 8, 10) \end{pmatrix}$

zeilenweise gelesen wird und dass es sich bei der oben notierten Multiplikation um Skalarprodukte handelt.

Daher können wir in dem „Supervektor“ die inneren Klammern und Kommata weglassen und erhalten:

10.15.5 Umformung eines Gleichungssystems 4

$$\begin{array}{l} 1x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 10z = 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (1, 2, & 3) \\ (4, 5, & 6) \\ (7, 8, 10) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dieses Objekt erhält nun einen eigenen Namen.

10.16 Matrix

Definition 10.16. (i) Ein rechteckiges Rechenschema der folgenden Form heißt Matrix:²⁶

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(ii) m heißt die Zeilenzahl, n die Spaltenzahl dieser Matrix.

(iii) Die a_{ij} heißen Elemente der Matrix.

(iv) m und n geben die Ordnung der Matrix an:

A ist eine $(m \times n)$ - Matrix.

10.17 Matrix mal Vektor

Definition 10.17. Sind die $(m \times n)$ - Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

gegeben, so ist die Multiplikation $A \cdot \vec{x}$ definiert durch:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Skalarprodukt der 1. Zeile von A mit dem Vektor } \vec{x} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{Skalarprodukt der m-ten Zeile von A mit dem Vektor } \vec{x} \end{array}$$

²⁶Im Jahr 1841 verwendete Arthur CAYLEY (1821-1895) den Begriff „Matrix“ erstmalig im Zusammenhang mit der Notation von Gleichungssystemen. *Matrizen* im Sinne dieser Definition wurden 1850 von James Joseph SYLVESTER (1814-1897) eingeführt.

10.18 Übung

Übung „Matrix mal Vektor“

Berechnen Sie folgende Multiplikationen:

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung (i)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung (ii)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\pi + 4) = 2\pi + 4$$

Lösung (iii)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

FEHLER !

Wie Sie sehen, probiere ich auch jetzt wieder, Sie reinzulegen.

Sie sollten in der Zwischenzeit gemerkt haben, dass ich dies immer wieder versuche.

Lösung (iv)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt „Einheitsmatrix“. Sie wird mit **I** bezeichnet.

10.19 Addition von Matrizen

Definition 10.19. Sind die beiden $(m \times n)$ - Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben, so ist die Addition der beiden Matrizen $A + B$ definiert durch:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Zwei Matrizen $A = (a_{ik})_{m,n}$ und $B = (b_{ik})_{m,n}$ werden elementweise addiert.

Matrixaddition

Es ist nur möglich, Matrizen mit gleicher Ordnung zu addieren.

10.20 Rechenregeln für Matrix-Addition

Satz 10.20. Seien A, B und C Matrizen der Ordnung $(m \times n)$. Dann gilt:

- (i) Die Summe zweier Matrizen ist eine Matrix. (Abgeschlossenheit)
- (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativität)
- (iii) $A + B = B + A$ (Kommutativität)
- (iv) Es gibt eine Matrix 0 (Nullmatrix), so dass $A + 0 = A$ (Existenz des neutralen Elementes)
- (v) Zu zwei Matrizen A und B existiert eine Matrix Z , so dass $A + Z = B$ (Existenz des inversen Elementes)

10.21 „Skalar mal Matrix“

Definition 10.21. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ eine Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.

Dann definieren wir die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ist die Matrix der mit dem Skalar multiplizierten Elemente.

10.22 Matrix-Produkt

Definition 10.22. Sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix} \text{ und die Matrix } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

gegeben, so ist das Produkt der beiden Matrizen $A \cdot B$ definiert durch:

$$C = A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$$

. Die Matrix C umfasst also sämtliche Skalarprodukte aus den ZEILEN von A und den SPALTEN von B .

. Die Matrix C besitzt die Ordnung $(m \times n)$.

Matrix-Produkt

Es ist nur möglich, Matrizen mit passender Ordnung miteinander zu multiplizieren.

Matrix-Produkt

Das Matrixprodukt ist nur definiert, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist !

10.23 Übung Matrixprodukt

Übung - Matrixprodukt

Berechnen Sie folgende Matrixprodukte:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(iv)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(v)} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung (i)

Betrachten wir zunächst die Ordnungen der Matrizen: $(2 \times 3) \cdot \underbrace{(3 \times 3)}_{=}$ $= (2 \times 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung (ii)

Betrachten wir zunächst die Ordnungen der Matrizen: $(1 \times 3) \cdot \underbrace{(3 \times 1)}_{=}$ $= (1 \times 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2) = 2$$

Lösung (iii)

Betrachten wir zunächst die Ordnungen der Matrizen: $(3 \times 1) \cdot \underbrace{(1 \times 3)}_{=}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie die beiden Resultate von (ii) und (iii), so sehen Sie:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Lösung (iv)

Betrachten wir zunächst die Ordnungen der Matrizen: $(2 \times 2) \cdot \underbrace{(2 \times 2)}_{=}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung (v)

Betrachten wir zunächst die Ordnungen der Matrizen: $(2 \times 2) \cdot \underbrace{(2 \times 2)}_{=}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie die beiden Resultate von (iv) und (v), so sehen Sie wieder:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

10.24 Rechenregeln für das Matrixprodukt

Satz 10.24. Seien A, B und C Matrizen und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Das Produkt zweier (passender) Matrizen ist eine Matrix. (Abgeschlossenheit)

(ii) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativität)

(iii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Distributivität I)

(iv) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (Distributivität II)

(v) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$

Nichtkommutativität des Matrixproduktes

Das Matrixprodukt ist in der Regel NICHT kommutativ:

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

10.25 Beispiele für spezielle Matrizen

Beispiele für spezielle Matrizen

(i) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, so ist $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ die transponierte Matrix.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist eine quadratische Matrix.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine symmetrische Matrix.

Beispiele für spezielle Matrizen

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

(v) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, so ist $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$ die Hauptdiagonale.

(vi) $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

10.26 Anwendungen der Matrizenrechnung

Satz 10.26. Betrachten wir nochmals die Gleichungssysteme aus 10.15.

Wir schreiben diese nun äquivalent um in Matrixgleichungen:

$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 10z &= 3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 9z &= 3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 9z &= 4 \end{aligned}$
⇕	⇕	⇕
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
⇕	⇕	⇕
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
⇕	⇕	⇕
genau eine Lösung: $(x, y, z)^T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)^T$	unendlich viele Lösungen	keine Lösung

10.26.1 Lösungsabhängigkeit

Die Lösungsmengen der drei Gleichungssysteme wird nun durch eine Größe determiniert, die unmittelbar von der Koeffizientenmatrix des jeweiligen Gleichungssystems abhängt.

10.27 Rang einer Matrix

Satz 10.27. Sei A eine $(m \times n)$ - Matrix.

Dann bezeichnen wir mit Rang der Matrix A die Anzahl der NICHT-NULLZEILEN der Matrix A , *nachdem* die Matrix A auf obere Dreiecksgestalt transformiert wurde.²⁷

²⁷Der Begriff *Rang* stammt von Ferdinand Georg FROBENIUS (1849-1917), der ihn 1879 erstmals verwendete.

10.28 Rang einer Matrix

Satz 10.28. Sei A eine $(m \times n)$ - Matrix. Dann gilt stets:

$$\text{Rg}(A) \leq \min(m, n)$$

10.29 Voller Rang, Maximalrang

Definition 10.29. Sei A eine $(m \times n)$ - Matrix. Falls

$$\text{Rg}(A) = \min(m, n)$$

so definieren wir dies als:

A hat vollen Rang bzw. A hat maximalen Rang

10.30 Übung zur Rangbestimmung

Übung zur Rangbestimmung

Bestimmen Sie den Rang der Matrizen aus 10.26, also von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dazu führen wir die aus 10.15 bekannten Umformungen durch.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$II - 4I$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$II - 4I$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$III - 7I$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$III - 7I$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix}$	$III - 2II$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$	$III - 2II$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$\Rightarrow \text{Rang} = 3$		$\Rightarrow \text{Rang} = 2$	

10.31 Erweiterte Matrix

Definition 10.31. Sei A eine $(m \times n)$ -Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir mit

$(A | \vec{b})$ die $(m \times (n+1))$ -Matrix, deren erste n Spalten diejenigen der Matrix A sind und deren letzte Spalte der Vektor $\vec{b}$ ist. $(A | \vec{b})$ heißt die erweiterte Matrix.

10.32 Anwendungen auf unsere Gleichungssysteme

Anwendungen auf unsere Gleichungssysteme

Betrachten wir nochmals die Gleichungssysteme aus 10.15.

Wir schreiben diese nun äquivalent um

$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 10z &= 3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 9z &= 3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 9z &= 4 \end{aligned}$
⇕	⇕	⇕
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
⇕	⇕	⇕
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 10 & 3 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{array} \right)$
⇕	⇕	⇕
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$
⇕	⇕	⇕
genau eine Lösung: $(x, y, z)^T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right)^T$	unendlich viele Lösungen	keine Lösung

10.33 Rang der erweiterten Matrix

Rang der erweiterten Matrix

Wir werfen noch einmal einen Blick auf die letzten Matrixsysteme

und bestimmen den Rang der erweiterten Matrizen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Rg}(A \mid b) = 3$$

$$= \text{Rg}(A) = 3$$

$\Updownarrow$

genau eine Lösung:

$$(x, y, z)^T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right)^T$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Rg}(A \mid b) = 2$$

$$= \text{Rg}(A) = 2$$

$\Updownarrow$

unendlich viele Lösungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Rg}(A \mid b) = 3$$

$$\neq \text{Rg}(A) = 2$$

$\Updownarrow$

keine Lösung

Damit erhalten wir:

10.34 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Satz 10.34.

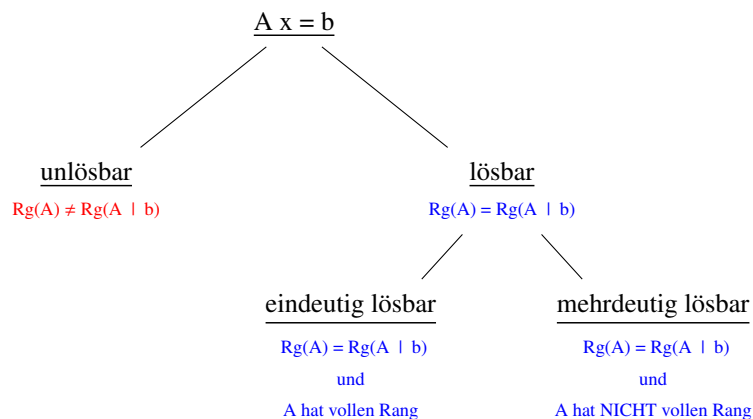


Abbildung 46: Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

10.35 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Satz 10.35. Sei A eine $(m \times n)$ - Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

(i) Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A \mid b).$$

(ii) Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann **eindeutig** lösbar, wenn

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A \mid b)$$

und zusätzlich der

Rang von A maximal

ist.

Das war's !!!

Das war's !!!

Schluß

Hier endet der klausurrelevante Stoff. Schade, denn *Mathe macht Spaß !*

Für die anstehenden *Prüfungen* wünsche ich Ihnen viel Erfolg !



Tabellenverzeichnis

1	Rechenoperationen für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	5
2	Rechenoperationen für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$	6
3	Rechenoperationen für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	7
4	Eigenschaften einiger Brüche	8
5	Rechenoperationen für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	11
6	Rechenoperationen für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	12
7	Potenzmenge	16
8	Symbolik der Mengenlehre	19
9	Einige Folgen zur Einstimmung	30
10	FIBONACCI-Zahlen	31
11	Beispiel einer arithmetischen Reihe	34
12	Konvergenz von q^n	38
13	Nachschüssige Rente	45
14	Ableitungen der Potenzfunktion	50
15	Ableitungen elementarer Funktionen	51
16	Fakultäten	55
17	Erinnerung an Ableitungen elementarer Funktionen	69
18	Gegenüberstellung Eindimensional vs. Mehrdimensional	93

Abbildungsverzeichnis

1	Teilmenge	15
2	Schnittmenge	17
3	Disjunkte Menge	17
4	Vereinigungsmenge	17
5	Disjunkte Vereinigungsmenge	18
6	Differenzmenge $A \setminus B$	18
7	Differenzmenge $B \setminus A$	18
8	Disjunkte Vereinigung	19
9	Abbildung: nein	23
10	Abbildung: ja	24
11	Surjektiv: nein	25
12	Surjektiv: ja	25
13	Injektiv: nein	26
14	Injektiv: ja	26
15	Originalabbildung	27
16	Inverse Abbildung	27
17	Bijektiv: nein	28
18	Bijektiv: ja	28
19	Ableitung Sinus - Cosinus	51
20	Graph der Sinusfunktion	56
21	Graph der Cosinusfunktion	56
22	Graph der Exponentialfunktion	57

23	Graph der Logarithmusfunktion	58
24	Grundstück	62
25	Grundstück mit unterer Begrenzung	63
26	Grundstück mit unterer und oberer Begrenzung 1	63
27	Grundstück mit unterbietender Fläche	64
28	Grundstück mit überbietender Fläche	64
29	Grundstück mit Konsens- und Konfliktfläche 1	65
30	Grundstück mit unterer und oberer Begrenzung 2	65
31	Grundstück mit Konsens- und Konfliktfläche 2	66
32	Grundstück mit unterer und oberer Begrenzung 3	66
33	Grundstück mit Konsens- und Konfliktfläche 3	67
34	Stammfunktion Sinus - Cosinus	69
35	Integral Cosinus von 0 bis $\frac{\pi}{2}$	78
36	Integral Cosinus von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von $\frac{\pi}{2}$ bis π	78
37	Integral Cosinus von 0 bis π	79
38	Integral Cosinus von $\frac{\pi}{2}$ bis π und von π bis $\frac{3\pi}{2}$	79
39	Integral Cosinus von 0 bis $\frac{3\pi}{2}$	80
40	Fläche Cosinus von 0 bis $\frac{3\pi}{2}$	81
41	Dreikant-Prisma (Satteldach)	83
42	Bewegung entlang der Dachrinne	83
43	Bewegung zum Dachfirst	83
44	Bewegung in beliebiger Richtung	84
45	Ablauf einer Winkelberechnung zwischen Vektoren	115
46	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	131

Personenverzeichnis

1	EULER, Leonhard (1707 - 1783)	12
2	CANTOR, Georg (1845 - 1918)	13
3	VENN, John (1834 - 1923)	15
4	DESCARTES, René (1596 - 1650)	21
5	FIBONACCI (ca.1180 - ca.1241)	32
6	GAUSS, Carl-Friedrich (1777 - 1855)	34
7	NEWTON, Isaac (1643 - 1727)	48
8	LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646 - 1716)	48
9	RIEMANN, Bernhard (1826 - 1866)	62
10	SCHWARZ, Hermann Amandus (1843 - 1921)	92
11	LAGRANGE, Joseph-Louis (1736-1813)	100
12	GRASSMANN, Hermann (1707 - 1783)	105
13	SYLVESTER, James Joseph (1814 - 1897)	105

Quellenangabe:

Die Abbildungen der Wissenschaftler stammen aus der deutschen Ausgabe von
Wikipedia: de.wikipedia.org

Index

- D_f , 29
- K_0 , 42
- K_n , 42
- R_0 , 46
- R_n , 46
- R_n^* , 47
- W_f , 29
- Σ , 32
- $\mathbb{N}_0$, 14
- $\cap$, 17
- $\cup$, 17
- $\emptyset$, 13
- $\in$, 13
- $\mathbb{C}$, 12
- $\mathbb{N}$, 4
- $\mathbb{Q}$, 6
- $\mathbb{R}$, 9
- $\mathbb{R}^2$, 21
- $\mathbb{R}^3$, 21
- $\mathbb{Z}$, 5
- ∇ , 86
- $\notin$, 13
- $\subset$, 15
- $\subseteq$, 15
- ε , 36
- $\vee$, 15
- $\wedge$, 15
- $\{\}$, 13
- $\cos$, 56
- e , 57
- $\ln$, 58
- r^* , 47
- $\sin$, 56
- Äquivalenzrelation, 22
- äußere Funktion, 50
- überabzählbare Menge, 14
- Abbildung, 23, 28
- Abgeschlossenheit, 4, 106, 108, 123, 126
- abhängige Variable, 29
- Ableitung Cosinus, 59
- Ableitung der Umkehrfunktion, 60
- Ableitung Exponentialfunktion, 60
- Ableitung Logarithmus, 61
- Ableitung Sinus, 59
- Ableitung Trigonometrie, 51
- Ableitungsregeln, 50
- abzählbare Menge, 14
- Abzinsung, 43
- Addition von Vektoren, 106
- Additionsregel Integration, 71
- Amortisationsschulden, 47
- Anfangskapital, 42
- Annuitäten, 47
- Annuitätentilgung, 47
- Argument, 29
- arithmetische Folge, 31
- arithmetische Reihe, 34
- Assoziativität, 4, 106, 108, 123, 126
- Barwert, 43
- Barwertformel, 43
- bestimmtes Integral, 68
- Betrag, 10
- Betrag eines Vektors, 111
- bijektiv, 27
- Bild, 24
- CANTOR, 13
- ceteris paribus, 84
- Cosinus, 56
- Definitionsbereich, 29
- del, 85
- DESCARTES, 21
- Diagonalmatrix, 127
- Differentialquotient, 49, 82
- Differentialrechnung, 48
- Differenzenquotient, 48, 82
- Differenzmenge, 18
- Disjunkte Mengen, 17
- disjunkte Vereinigungsmenge, 18, 19
- Diskontierung, 43
- Distributivität, 4, 108, 126
- divergent, 36
- dritte Ableitung, 52
- eindeutige Relation, 23
- eine Lösung, 116

elementare Ableitungsfunktion, 51, 69
 elementare Integrale, 69
 Elemente, 13
 Elemente der Matrix, 121
 Endkapital, 42
 endliche Menge, 14
 endliche Zahl, 8
 erste Ableitung, 49
 Erweiterte Matrix, 130
 EULER, 12
 EULERSche Zahl, 57
 exp, 57
 Exponentialfunktion, 57

 Faktorregel, 50, 70
 Faktorregel Integration, 70
 Fakultät, 55
 FIBONACCI, 32
 FIBONACCI-Zahlen, 31
 Flächeninhalt, 80
 Flächenmaßzahl, 80
 Funktion, 28

 ganze Zahl, 5
 Gaußscher Algorithmus, 117
 GAUSS, 34, 117
 geometrische Folge, 31, 39
 geometrische Reihe, 35, 39
 geordnetes Paar, 20
 Gleichungssystem, 116
 Gradient, 86
 GRASSMANN, 105
 Grenzwert, 36, 37, 39

 halbjährliche Verzinsung, 44
 Hauptdiagonale, 127
 Hauptsatz Differential-Integral, 68
 homogene Relation, 22

 i, 42
 injektiv, 25, 27
 innere Funktion, 50
 Integrierbarkeit, 68
 inverse Abbildung, 26
 inverses Element, 5, 7, 106, 123
 irrationale Zahl, 9

 jährliche Verzinsung, 43

 Kapital, 42
 kartesisches Produkt, 20
 keine Lösung, 116
 Kettenregel, 50, 70
 Kommutativität, 4, 106, 123
 komplexe Zahl, 12
 Komponente, 20
 Komponenten, 105
 konkav, 53
 konstante Folge, 35
 konvergent, 36
 konvex, 53
 Krümmung, 53
 kreuz, 20
 kritische Stelle, 52, 88

 Länge eines Vektors, 111
 Lage von Geraden, 115
 LAGRANGE, 100
 LAGRANGE-Funktion, 100
 LAGRANGE-Methode, 99
 Laufindex, 32
 Laufzeit, 43
 leere Menge, 13
 LEIBNIZ, 48
 lim, 36
 Limes, 36
 logarithmus naturalis, 58

 Mächtigkeit, 14
 marginale Veränderungen, 103
 Matrix, 121
 Matrixaddition, 123
 Matrixgleichung, 128
 Matrixmultiplikation, 121, 124
 Matrixprodukt, 124
 Maximalrang, 129
 Maximum, 51–53
 mehrdimensionale Sattelstelle, 94
 mehrdimensionales Maximum, 94
 mehrdimensionales Minimum, 94
 Menge, 13
 Mengengleichheit, 15
 Methode von LAGRANGE, 99

Minimum, 51–53
 monatliche Verzinsung, 44
 Multiplikativität, 108

 Nabla, 86
 nachschüssig, 42
 nachschüssige Rente, 44
 nachschüssige Rentenrate, 46
 nachschüssiger Rentenbarwert, 46
 nachschüssiger Rentenendwert, 46
 natürliche Zahl, 4
 natürlicher Logarithmus, 58
 neutrales Element, 5, 7, 106, 123
 NEWTON, 48
 Nichtkommutativität, 127
 Norm, 111
 Nullmatrix, 123

 obere Dreiecksmatrix, 127
 obere Rechtecksumme, 67
 Ordnung, 121
 Orthogonalität, 114

 p , 42
 Partialsumme, 34, 35
 partielle Ableitungen erster Ordnung, 85
 partielle Ableitungen zweiter Ordnung, 89
 partielle Integration, 72
 periodische Zahl, 8
 Potenzfunktion, 49
 Potenzmenge, 16
 Produktregel, 50, 70, 71

 q , 42
 quadratische Matrix, 127
 Quadrupel, 20
 Quotientenregel, 50, 70

 r , 44, 46
 Rang einer Matrix, 128
 Rate, 44
 rationale Zahl, 6
 reelle Zahl, 9
 reflexiv, 22
 Reihenfolge der Ableitungen, 86
 Relation, 22
 Rente, 42, 44
 Rentenrate, 44
 RIEMANN, 62

 Sattelstelle, 54
 Schnittmenge, 17
 SCHWARZ, 92
 Sinus, 56
 skalare Multiplikation, 107
 Skalarprodukt, 110
 Spaltenvektor, 106
 Spaltenzahl, 121
 Stammfunktion, 68
 Stammfunktionen Trigonometrie, 69
 steilster Anstieg, 86
 stetige Verzinsung, 44
 Substitutionsmethode, 96
 Substitutionsregel, 76
 Summenregel, 50, 70
 Summenregel Integration, 70
 Summenzeichen, 32
 surjektiv, 24, 27
 SYLVESTER, 105
 symmetrisch, 22
 symmetrische Matrix, 127

 tägliche Verzinsung, 44
 Teilmenge, 15
 Tilgungsplan, 47
 Tilgungsrate, 47
 Tilgungsschulden, 47
 transitiv, 22
 transponierte Matrix, 127
 transponierter Vektor, 110
 Tripel, 20
 Tupel, 19

 unabhängige Variable, 29
 uneigentliches Integral, 76
 unendlich viele Lösungen, 116
 unendliche geometrische Reihe, 39
 unentscheidbare Stelle, 95
 Ungleichung, 10
 untere Rechtecksumme, 67
 unterjährige Verzinsung, 43
 Urbild, 24

 Vektor, 105

VENN, 15
VENN-Diagramme, 15
verbotene Grenzwerte, 36, 38
Vereinigungsmenge, 17
Vertauschungsregel Integration, 71
vierteljährliche Verzinsung, 44
voller Rang, 129
vorschüssig, 42
vorschüssige Rente, 44
vorschüssige Rentenrate, 47
vorschüssiger Rentenbarwert, 47
vorschüssiger Rentenendwert, 47

waagerechte Tangente, 51, 54
Wendestelle, 53, 54
Wert, 29
Wertebereich, 29
Winkel zwischen Vektoren, 112

Zahlmengen, 4, 28
Zeilenzahl, 121
Zinsen, 42
Zinseszinsen, 42
Zinseszinsformel, 43
Zinsfaktor, 42
Zinsfuß, 42, 43
Zinssatz, 42
zweite Ableitung, 52